

干扰信道中 ZF 协作 MIMO 发射的性能分析

王海荣¹, 董健², 黄永明¹, 杨绿溪¹

(1.东南大学 信息科学与工程学院, 江苏 南京 210096; 2.江苏省邮电规划设计院有限责任公司, 江苏 南京 210005)

摘要: 针对有协作反馈的多输入多输出(MIMO, multiple-input multiple-output)干扰信道, 研究了迫零(ZF, zero-forcing)协作发射策略的性能。为了推导和速率(sum rate)与中断概率等性能指标的解析表达式, 研究了在 MIMO 的维数趋向无穷时, 各性能指标的渐近特性。利用随机矩阵理论, 首次提出了迫零协作发射策略中等效矩阵所有特征值的一个渐近估计。并基于此推导了和速率的 2 个闭式表达式, 同时还获得了和速率随着 MIMO 维数变化的缩放律。此外, 利用多元统计中 Wishart 矩阵最小特征值概率分布函数的相关结论, 推导了 2 种特例下的上述协作发射策略的中断概率表达式。仿真结果验证了所提的性能指标解析表达式不仅在大维的情况下成立, 而且在中等维度下也是有效的。

关键词: 多输入多输出干扰信道; 迫零; 协作发射; 随机矩阵理论; 多元统计

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2012)12-0069-10

Performance analysis of zero-forcing coordinated MIMO transmission in interference channels

WANG Hai-rong¹, DONG Jian², HUANG Yong-ming¹, YANG LV-xi¹

(1. School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. Jiangsu Post & Telecommunications Planning and Designing Institute Co. Ltd., Nanjing 210005, China)

Abstract: The performance of the zero-forcing (ZF) coordinated transmit strategy in multiple-input multiple-output (MIMO) interference channels was investigated. With the goal to derive analytical expression of its performance metric such as the sum rate and the outage probability, the asymptotic behavior of the performance metric was examined with the MIMO dimension tending to infinity. Using the random matrix theory, an asymptotic estimate of all the eigenvalues of the effective channel matrix in the ZF coordinated transmit strategy was first proposed. Based on that, two closed-form expressions of the sum rate were derived, from which the scaling law of the sum rate with the MIMO dimension was obtained. Furthermore, using the multivariate statistics about the probability density distribution of the minimum eigenvalue of a Wishart matrix, the analytical expression of the outage probability for the coordinated transmit scheme was achieved under two special cases. Simulation results show that the proposed analytical expression of the performance metric is valid not only in the large-dimension regime, but also in the normal-dimension regime.

Key words: MIMO interference channel; zero forcing; coordinated transmission; random matrix theory; multivariate statistics

收稿日期: 2011-11-02; 修回日期: 2012-05-30

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”项目)基金资助项目(2007CB310603); 国家自然科学基金资助项目(60902012, 61071113); 国家科技重大专项基金资助项目(2011ZX03003-001, 2011ZX03003-003); 教育部博士点基金资助项目(20090092120013, 20100092110010)

Foundation Items: The National Basic Research Program of China (973 Program) (2007CB310603); The National Natural Science Foundation of China (60902012, 61071113); The National Science and Technology Major Project of China (2011ZX03003-001, 2011ZX03003-003); The Ph D Programs Foundation of Ministry of Education of China (20090092120013, 20100092110010)

1 引言

在无线网络中,通过在发射端和接收端配置多根天线,多输入多输出技术可以在不增加发射功率和系统带宽的情况下成倍地提高系统的频谱利用率。但当网络中存在多个信源信宿对时,则存在着同信道干扰,会大大降低整个系统的性能^[1]。近年来,在多天线干扰信道的研究中,干扰对齐(IA, interference alignment)技术被提出^[2],其能在高信噪比条件下获得信道的容量。由于干扰对齐技术实际应用的复杂性,比如通常需要理想的全局信道状态信息等,一些新的更实用的干扰对齐策略被提出,例如文献[3]给出了干扰对齐策略在蜂窝小区下行链路中的应用,其仅需要小区内的信道信息反馈;文献[4]则提供了一种基于预编码矩阵与干扰子空间的交替最小化来实现干扰对齐的方法。考虑到实际应用中所获得的信道状态信息(CSI, channel state information)总是不理想的,近来有一些在非理想CSI和有限反馈场景下的IA策略的研究^[5,6]。

IA策略已经获得的是理论上的增益,比如自由度,但在实际应用上还是面临着挑战。所以在干扰信道中获得低复杂度的协作MIMO发射策略是很重要的。基于此,已采用迫零和最小均方误差(MMSE, minimum mean square error)等不同准则设计了协作线性接发收机^[7],用于消除两组点对点MIMO链路间的同信道干扰。而在给定信干噪比(SINR, signal to noise plus interference ratio)约束下最小化总的加权发射功率的一种协作波束形成策略在文献[8]中被提出,该策略利用了上下行链路对偶性的推广,针对的是一个多输入单输出(MISO, multiple-input single-output)干扰信道。类似地,如果采用最大化最小SINR准则,文献[9]中给出了一个分布式协作发射策略,已经证明在总功率约束下是最优的。

本文主要关注采用ZF准则的协作发射策略。通常针对一个有 K 个用户的MIMO干扰信道,实现一个低复杂度的ZF协作优化是很困难的。但是,对于特殊的2个用户MIMO干扰信道,已经在文献[10]中证明基于协作反馈的针对两干扰链路的线性接发收机的联合设计可以实现迫零的目标。为了获得对ZF协作发射更深刻的认识,本文分析了它的性能指标,包括和速率与中断概率。

据所知,目前对此ZF协作发射策略,还没有成功推导出这些性能指标的闭式表达式。为了实现

此目的,需要推导一个复Wishart矩阵特征值的概率密度函数(PDF, probability density function),这是很难实现的。因此,本文转而研究在大维情况下的性能表达式,例如,分析这些性能指标随着MIMO维数趋向无穷时的渐近行为。特别地,一些随机矩阵理论中关于Wishart矩阵的结论^[11~17],在这里被用来推导一个在ZF协作发射策略中等效信道矩阵所有特征值的渐近估计。基于此,获得了和速率与中断概率在大维情况下的闭式表达式。数值仿真结果验证了所提的和速率与中断概率的解析表达式不仅在大维MIMO情况下具有相当的精确性,即便是中等维数下也是有效的。

2 系统模型

系统模型如图1所示,为一个四节点网络,每个节点均配置 L 根天线,两对接收发机分别为 (T_1, R_1) 和 (T_2, R_2) 。为了消除两对接收发机间的同信道干扰,协作发射将被采用,即每个节点的发射预编码器和均衡器都需要联合设计。为此,如图1所示,每个接收机需要向它们的目标发射机和干扰发射机都反馈CSI,分别被称作本地反馈和协作反馈。假设所有的信道均是服从独立的块衰落。令 H_{mn} 表示归一化的发射机 T_n 与接收机 R_m 间的信道,它的元素是独立同分布的(IID, independently and identically distributed)且满足 $CN(0,1)$ 。考虑路径损耗效应,当 $m \neq n$ 时,干扰信道建模为 $\{\eta H_{mn}\}$ 而数据信道表示为 $\{H_{mm}\}$,其中,标量因子 $\eta < 1$,表征数据信道和干扰信道间的不同路径损耗。假定每个链路经线性预编码和均衡能支持 $M-L$ 个空间数据流。每个发射机对所有的空间流采用同样的发射功率,对 T_n , $n=1,2$ 表示为 P_n ,并且有一个功率约束为 P_{\max} 。那么在接收机处 R_m 的信号可表示为

$$y_m = G_m^\dagger H_{mm} F_m x_m + G_m^\dagger \eta H_{mn} F_n x_n + w_m, m, n \in \{1, 2\}, m \neq n \quad (1)$$

其中, w_m 表示加性白噪声,其分布满足 $w_m \sim CN(0,1)$,而 G_m 和 F_m 分别表示在 R_m 处采用的线性均衡器和在 T_m 处采用的线性预编码器。由此,在 R_m 处的第 l 个流的接收SINR为

$$SINR_m^{(l)} = \frac{P_m \left\| \begin{bmatrix} G_m \\ \vdots \\ H_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} \right\|^2}{1 + P_n \eta \left\| \begin{bmatrix} G_m \\ \vdots \\ H_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \right\|^2}, m \neq n \quad (2)$$

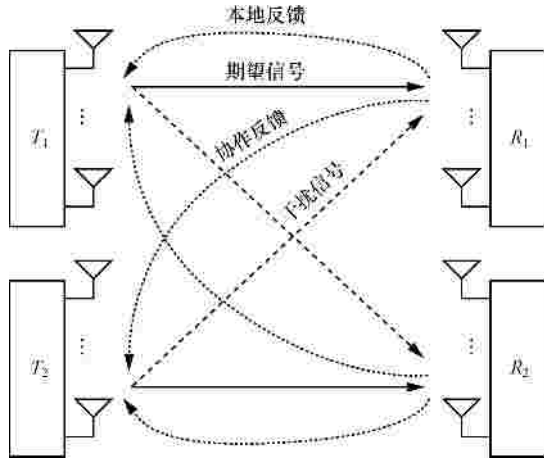


图 1 有本地反馈和协作反馈的 MIMO 干扰信道

因此可以考虑系统的 2 个性能指标，和速率与中断概率。和速率 C 定义为

$$C = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^M E \left[\text{lb} \left(1 + \text{SINR}_m^{[l]} \right) \right] \quad (3)$$

接下来，定义一个中断事件为至少有一个数据流的 SINR 小于 q ，其中， q 表示能正确解码的接收 SINR 阈值，即中断概率可以定义为

$$P_{\text{out}} = \Pr \left(\min_{n=1,2} \min_{l=1, \dots, M} \text{SINR}_m^{[l]} < q \right) \quad (4)$$

3 ZF 协作预编码

为了最优化和速率性能或中断性能，成对的均衡器和预编码器 (G_m, F_n) 应当基于本地反馈和协作反馈联合设计。一个通常的针对 ZF 策略接收机消除干扰的方法就是加上正交约束，即

$$G_m^\dagger H_{mn} F_n = 0, \quad m, n \in \{1, 2\}, m \neq n \quad (5)$$

为了实现此目的，预编码器 F_n 的最优化可以分解为一个内预编码器 $F_n^i \in C^{L \times M}$ 和一个外编码器 $F_n^o \in C^{M \times M}$ 的分别设计，且有 $F_n = F_n^i F_n^o$ 。类似地，均衡器 G_m 的最优化可以分解为一个内均衡器 $G_m^i \in C^{L \times N}$ 和一个外均衡器 $G_m^o \in C^{N \times N}$ 的分别设计，其中， N 是设计参数，满足条件 $N \geq M$ 且 $N \leq L - M$ 。内均衡器/内预编码器对 (G_m^i, F_n^i) 是设计来满足约束(5)的，而外均衡器/外预编码器对 (G_m^o, F_n^o) 则是用于提升链路的阵列增益。因此，内预编码器和内均衡器的最优化问题可以给定

$$(G_m^i)^\dagger H_{mn} F_n^i = 0, \quad m \neq n \quad (6)$$

在此约束下， (G_m^i, F_n^i) 能通过对 H_{mn} 的奇异值分解来获得

$$H_{mn} = V_{mn} \begin{bmatrix} \sqrt{l_{mn}^{[1]}} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \sqrt{l_{mn}^{[L]}} \end{bmatrix} U_{mn}^\dagger \quad (7)$$

其中酉矩阵 V_{mn} 和 U_{mn} 由 H_{mn} 的左右奇异列向量分别组成，而 $\{l_{mn}^{[l]}\}$ 表示的是 $H_{mn} H_{mn}^\dagger$ 的降序排列特征值。当如下选择 (G_m^i, F_n^i) 时，可满足式(6)中的约束

$$G_m^i = \{V_{mn}|_k \mid k \in A\}, \quad F_n^i = \{U_{mn}|_k \mid k \in B\} \quad (8)$$

其中， A 和 B 是索引 $\{1, 2, \dots, L\}$ 上的两个互不相交的子集，且 $|A| = N$ 和 $|B| = M$ 。

给定 (G_m^i, F_n^i) 后，外均衡器/外预编码器对 (G_m^o, F_n^o) 的联合设计是基于 $N \times M$ 等效信道

$H_{mm}^o = (G_m^i)^\dagger H_{mm} F_m^i$ 的奇异值分解。

$$H_{mm}^o = V_{mm} \begin{bmatrix} \sqrt{l_{mm}^{[1]}} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \sqrt{l_{mm}^{[M]}} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} U_{mm}^\dagger \quad (9)$$

当要以 H_{mm} 的特征模式发射数据时， (G_m^o, F_n^o) 应做如下选择

$$G_m^o = \{V_{mm}|_1, V_{mm}|_2, \dots, V_{mm}|_M\}, \quad F_n^o = U_{mm} \quad (10)$$

当假设有理想的 CSI 反馈时，上述的预编码器和均衡器的联合设计就把每个数据链路转换为 M 个解耦的空间信道，即各个解耦信道上相互不再有干扰。因此，式(2)中每个数据流上的 SINR 被简化为

$$\text{SINR}_m^{[l]} = P_m l_{mm}^{[l]} \quad (11)$$

假设均采用最大的发射功率，和速率 C 可被改写为

$$C = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^M E \left[\text{lb} \left(1 + P_{\text{max}} l_{mm}^{[l]} \right) \right] \quad (12)$$

而中断概率为

$$P_{\text{out}} = \Pr \left(P_{\text{max}} \min \left(l_{11}^{[M]}, l_{22}^{[M]} \right) < q \right) \quad (13)$$

4 性能分析

和速率 C 和中断概率 P_{out} 是上述 ZF 协作发射 MIMO 系统的 2 个重要性能指标。在本节中通过理论分析来研究这 2 个指标的渐近特性。

观察式(12)和式(13), 可以发现这两个性能指标均与等效信道 H_{mm}^o 的特征值相关。其中, 和速率 C 是 H_{mm}^o 的所有特征值的对数累加和的形式, 而中断概率 P_{out} 则与 H_{mm}^o 的最小特征值的分布相关。考察等效信道 $H_{mm}^o = (G_m^i)^\dagger H_{mm} F_m^i$, 其中, H_{mm} 是一个 $L \times L$ 其元素服从独立同分布 $CN(0,1)$ 的随机矩阵, 因此根据相关定义, $H_{mm}^o \sim CN(0, (G_m^i)^\dagger G_m^i) \otimes ((F_m^i)^\dagger F_m^i)$, 由式(8)可知, G_m^i, F_m^i 均由酉矩阵的某些列组成, 显然有 $(G_m^i)^\dagger G_m^i = I_N$ 和 $(F_m^i)^\dagger F_m^i = I_M$, 所以 H_{mm}^o 是一个 $N \times M$ 其元素服从独立同分布 $CN(0,1)$ 的 Wishart 矩阵, 即有 $(H_{mm}^o)^\dagger H_{mm}^o \sim CW_M(N, I)$ 。基于此, 许多现有的关于 Wishart 矩阵的有用结论可以被用来分析所提的 ZF 协作预编码策略的性能。

4.1 和速率 C 的估计

由式(12)可知, 要精确地估计和速率 C 就必须知道 Wishart 矩阵 $(H_{mm}^o)^\dagger H_{mm}^o$ 的特征值分布, 通常这是困难的。因此, 在这里转为获得一个天线数趋向无穷时和速率的渐近估计。特别地, 本文关注和速率的渐近行为是在满足 $M, N \rightarrow \infty$, 且 $\frac{M}{N} \rightarrow b$ 的条件下, 即是在大维极限的情况下。并且还将利用随机矩阵理论来分析这种情况下 $(H_{mm}^o)^\dagger H_{mm}^o$ 特征值的经验分布。应当指出, 除了极其个别的情况, 一个 Wishart 矩阵的渐近特征值分布的显式表达式是非常罕见的。幸运的是, 虽然很难获得渐近特征值分布的显式表达式, 但通过对 Wishart 矩阵极限谱的研究获知, Wishart 矩阵的特征值还是有其特殊性质的, 例如文献[11,12]中证明其最大最小值随着矩阵维数趋向无穷, 分别几乎确定收敛到一个固定的与 b 相关的值。这意味着 $(H_{mm}^o)^\dagger H_{mm}^o$ 的最小特征值 l_{min} 和最大特征值 l_{max} 在大维情况下都是可估计的。至于其他的特征值, 利用数学物理中已存在的一些结论, 在大维的情况下也都可以相应估计出。

结论如下面的定理所示。

定理 1 在大维情况下, 如果 $M, N \rightarrow \infty$, 且 $\frac{M}{N} \rightarrow b \in [0,1]$, 那么 $(H_{mm}^o)^\dagger H_{mm}^o$ 的特征值 l_1, l_2, \dots, l_M (降序排列)可如下估计

$$l_1 = N(1 + \sqrt{b})^2 \tag{14}$$

$$l_i = l_1 - (i-1) \times \frac{l_1 - l_M}{M-1}, \quad i = 2, 3, \dots, M-1 \tag{15}$$

$$l_M = N(1 - \sqrt{b})^2 \tag{16}$$

证明 在文献[12]中已经证明当 $M, N \rightarrow \infty$, 且 $\frac{M}{N} \rightarrow b \in [0,1]$ 时, $H: CW_M(N, I)$ 的 l_{min} 和 l_{max} 满足 $\frac{1}{N} l_{min} \xrightarrow{as} (1 - \sqrt{b})^2, \frac{1}{N} l_{max} \xrightarrow{as} (1 + \sqrt{b})^2$ 。即有式(16)和式(14)。现在关注式(15)的证明。为了在已知 l_{min} 和 l_{max} 估计的基础上估计其他的特征值, 先研究相邻特征值间的间隔。令 d_{adja} 表示任意相邻特征值间的间隔, 而 d_{mean} 表示相等的相邻特征值间间隔。那么, 定义一个归一化的相邻特征值间间隔为 $R = d_{adja} / d_{mean}$ 。Dyson 已经在文献[18~20]中证明, R 的概率密度函数在大维极限情况下精确地逼近

$$f_R(s) \approx \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2} \tag{17}$$

这意味着归一化的相邻特征值间间隔 R 是逼近参数为 $s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 的瑞利分布。因此有 $E(R) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} s = 1$, 即在大维极限情况下, 特征值之间的间隔几乎是相等的, 同时, 由于已知 l_{min} 和 l_{max} , 所以可以很容易估计式(15)中的其他所有的特征值 $\{l_i, i = 2, 3, \dots, M-1\}$ 。

基于定理 1 中的结论, 式(12)中的和速率 C 的渐近特性可以写为

$$C_{asympt} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^M \text{lb}(1 + P_{max} l_{mm}^l) \tag{18}$$

其中, $l_{mm}^l = N \left[(1 + \sqrt{b})^2 - (l-1) \times \frac{4\sqrt{b}}{M-1} \right], \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2$ 。

应当指出, 上述特征值估计的精度通常仅在大维极限情况下才能保证。为了使其能适用于更一般

的情况，本文给出一个修正的估计

$$l_{mm}^{l*} = \frac{l_{mm}^l}{1+b} \quad (19)$$

接下来将证明这个修正的估计比先前提出的估计更加精确。

如文献[21]中所示，对一个中心 Wishart 矩阵 $W \sim W_M(N, I)$ 而言，有 $E[\text{tr}\{W\}] = MN$ 。这意味着 $(H_{mm}^o)^{\dagger} H_{mm}^o$ 的所有特征值的和等于 MN 。但是，很容易得到如定理 1 中所有特征值的估计之和等于 $MN(1+b)$ ，这与上述的特性矛盾。为了保证特征值的渐近特性以及满足上述求和特性，一个简单的方法是每个估计特征值乘以一个因子 $1/(1+b)$ ，即如式(19)所示。

因此，和速率的估计被修正为

$$C_{\text{asympt}}^* = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^M \text{lb}(1 + P_{\max} l_{mm}^{l*}) \quad M \geq 2 \quad (20)$$

迄今为止，本文一共提出了和速率的 2 个渐近估计，即式(18)和式(20)。理论上，这 2 个估计仅在满足 $M, N \rightarrow \infty, \frac{M}{N} \rightarrow b \in [0, 1]$ 的大维极限情况下生效。

但是，数值仿真结果显示当 b 较小时，这 2 个估计的精度即使在 M 不大的情况下也保持得很好。这表明此和速率的估计不仅能用于研究 ZF 协作发射策略的渐近性能，也能在实际系统的设计中充当目标函数。

为了更好地理解和速率本质，本文以一个精简的表达式来表示分析和速率的缩放律。具体见定理 2。

定理 2 在高 SNR 以及 MIMO 维数很大，即满足 $M, N \rightarrow \infty$ 且 $\frac{M}{N} = b \rightarrow 0$ 的情况下，ZF 协作发射

策略的和速率以 $C \sim 2\text{lb}\left(\frac{N!}{(N-M)!}\right)$ 的方式缩放，近似为 $2\text{lb}(N^M)$ 。

证明 由式(12)可知，当 SNR 较大时，有

$$\begin{aligned} C &\approx E\left[\text{lb}\left(P_{\max} l_{11}^{[1]}\right) + \dots + \text{lb}\left(P_{\max} l_{11}^{[M]}\right)\right] + \\ &E\left[\text{lb}\left(P_{\max} l_{22}^{[1]}\right) + \dots + \text{lb}\left(P_{\max} l_{22}^{[M]}\right)\right] \\ &= E\left[\text{lb}\left((P_{\max})^M l_{11}^{[1]} \dots l_{11}^{[M]}\right)\right] + \\ &E\left[\text{lb}\left((P_{\max})^M l_{22}^{[1]} \dots l_{22}^{[M]}\right)\right] \end{aligned} \quad (21)$$

所以和速率的缩放可以重新表示为

$$C : E\left[\text{lb}\left(l_{11}^{[1]} \dots l_{11}^{[M]}\right)\right] + E\left[\text{lb}\left(l_{22}^{[1]} \dots l_{22}^{[M]}\right)\right] \quad (22)$$

进一步可以表示为

$$C : E\left[\text{lb}\left(\det H_{11}^o\right)\right] + E\left[\text{lb}\left(\det H_{22}^o\right)\right] \quad (23)$$

考虑到对于一个中心复 Wishart 矩阵 $W : W_M(N, I)$ 且 $N > M$ ，满足文献[22]

$$E\left[\det W^k\right] = \prod_{l=0}^{M-1} \frac{\Gamma(N-l+k)}{\Gamma(N-l)} \quad (24)$$

其中， $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数并且对于整数参数有一个简单表达式 $\Gamma(n+1) = n!$ 。式(24)可以改写为

$$C \sim 2\text{lb}\left(\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-M+1)}\right) \quad (25)$$

并且由于 M, N 均为整数，因此有

$$C \sim 2\text{lb}\left(\frac{N!}{(N-M)!}\right) \quad (26)$$

而基于式(18)和式(20)的结果，在高 SNR 及 $b \rightarrow 0$ 的情况下，和速率可以如下估计

$$C_{\text{asympt}} \sim 2\text{lb}(N^M) \quad (27)$$

表 1 中的数值结果表明，当 b 较小(并不必须非常接近于零)时，和速率表达式 C 及它的估计 C_{asympt} 随着 MIMO 维数的增长几乎有着同样的缩放律。

表 1 实际和速率与估计和速率随 M, N 增加而增长的趋势

$b = 1/5$	和速率	
	$C \sim 2\text{lb}\left(\frac{N!}{(N-M)!}\right)$	$C_{\text{asympt}} \sim 2\text{lb}(N^M)$
$M=2, N=10$	12.987 3	13.287 7
$M=5, N=25$	45.208 3	46.438 6
$M=10, N=50$	110.098 2	112.817 1
$M=20, N=100$	259.876 3	265.754 2

4.2 中断概率分析

在本节中，将研究 ZF 协作发射策略中断概率的特性。令 $q^0 = q / P_{\max}$ ，中断概率表达式(13)可改写为

$$F_{\min}(q^0) = \Pr\left(\min(l_{11}^{[M]}, l_{22}^{[M]}) < q^0\right) \quad (28)$$

再 $F_{mm}^{\min}(q^0) = \Pr(l_{mm}^{\min} < q^0)$ ，则有

$$\begin{aligned}
 F_{\min}(\varrho^0) &= 1 - \Pr(\min(l_{11}^{[M]}, l_{22}^{[M]}) > \varrho^0) \\
 &= 1 - \Pr(l_{11}^{\min} > \varrho^0, l_{22}^{\min} > \varrho^0) \\
 &= 1 - \Pr(l_{11}^{\min} > \varrho^0) \Pr(l_{22}^{\min} > \varrho^0) \\
 &= 1 - (1 - F_{11}^{\min}(\varrho^0))(1 - F_{22}^{\min}(\varrho^0)) \\
 &= 1 - (1 - F_{H_{mm}^o}^{\min}(\varrho^0))^2 \tag{29}
 \end{aligned}$$

其中，最后一步是因为 $F_{11}^{\min}(\varrho^0) = F_{22}^{\min}(\varrho^0) = F_{H_{mm}^o}^{\min}(\varrho^0)$ 。这表明 $F_{\min}(\varrho^0)$ 仅与最小特征值分布相关。所以接下来首先提出 Wishart 矩阵最小特征值分布的一些重要结论。

定理 3 令 $A \sim CW_M(N, I)$ ，如果 l_{\min} 是 A 的最小特征值，那么

$$P(l_{\min} > x) = \text{etr}(-xI) \sum_{k=0}^{M(N-M)} \sum_k \frac{C_k(xI)}{k!} \tag{30}$$

其中， \sum_k^* 表示在整数 k 的划分 $k = (k_1, L, k_M)$ 上的求和，且有 $k_1 \leq N - M$ ；而 $k_1 \leq L \leq k_M \leq 0$ 且 $\sum_i k_i = k$ ； $C_k(Y)$ 是表示矩阵 Y 相对于划分 k 的 Zonal 多项式。

证明 直接推导一个复 Wishart 矩阵的最小特征值的分布是困难的。因此，换而利用文献[22]中的结论来推导本文的定理。令 A 满足 $W_m(n, \Sigma)$ 且 $n > m - 1$ ，并且令 W 为一个 $m \times m$ 的正定矩阵，即 $W > 0$ 。已经在文献[22]中 Theorem 9.7.3 证明，如果 $r = \frac{1}{2}(n - m - 1)$ 是一个正整数，那么有

$$P(A > W) = \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}W\right) \sum_{k=0}^{mr} \sum_k \frac{C_k\left(\frac{1}{2}\Sigma^{-1}W\right)}{k!} \tag{31}$$

其中， \sum_k^* 表示在整数 k 的划分 $k = (k_1, L, k_M)$ 上的求和；而 $k_1 \leq L \leq k_M \leq 0$ 且 $\sum_i k_i = k$ ； $C_k(Y)$ 是表示矩阵 Y 相对于划分 k 的 Zonal 多项式。令 $A = (H_{mm}^o)^* H_{mm}^o$ ，显然有 $A \sim CW_M(N, I)$ 。不等式 $l_{\min} > x$ 等价于 $A > xI$ 。那么式(30)中的结论可以将 $W = xI$ 代入式(31)中获得。

利用上述结论，可以很容易地获得 l_{\min} 的累积分布函数(CDF, cumulative distribution function)。经过一些基本的数学运算，表示 ZF 协作发射策略中

断概率的式(29)可改写如下

$$\begin{aligned}
 F_{\min}(\varrho^0) &= 1 - \left(\text{etr}(-\varrho^0 I) \sum_{k=0}^{M(N-M)} \sum_k \frac{C_k(\varrho^0 I)}{k!} \right)^2 \\
 &= 1 - \left(e^{-M\varrho^0} \sum_{k=0}^{M(N-M)} \sum_k \frac{C_k(\varrho^0 I)}{k!} \right)^2 \tag{32}
 \end{aligned}$$

其中， $C_k(\varrho^0 I)$ 是表示矩阵 $\varrho^0 I$ 相对于划分 k 的 zonal 多项式， $k = (k_1, L, k_M)$ 是整数 k 的划分，且有 $k_1 \leq N - M$ ， $k_1 \leq L \leq k_M \leq 0$ 并且 $\sum_i k_i = k$ 。

但在这里需要指出的是，随着整数 k 的增大，它的划分 k 的增长是十分惊人的，比如 $p(k=10) = 42, \dots, p(k=100) = 190\,569\,292$ ，因此式(32)在 k 很大的情况下，计算是非常复杂的。但是如果关注某些特例，则可以获得一些相当简洁的结果。

1) $M = N$ 的情况

首先考虑特例 $M = N$ 。已经在文献[22]中证明 $(\text{tr}X)^k = \sum_k C_k(X)$ 。如果 $M = N$ ，那么有 $k = 0, \dots, \sum_k C_k(X) = 1$ 。所以 ZF 协作发射策略中断概率可以简化为

$$F_{\min}^{M=N}(\varrho^0) = 1 - e^{-2M\varrho^0} \tag{33}$$

而 l_{\min} 的 PDF 简化为

$$f_{l_{\min}}^{M=N}(\varrho^0) = M e^{-M\varrho^0} \tag{34}$$

2) $M = N - 1$ 的情况

考虑另一个特例 $M = N - 1$ ，此时，式(32)可以改写为

$$F_{\min}^{M=N-1}(\varrho^0) = 1 - \left(e^{-M\varrho^0} \sum_{k=0}^M \sum_k \frac{C_k(\varrho^0 I)}{k!} \right)^2 \tag{35}$$

因为 \sum_k^* 是在整数 k 的划分 $k = (k_1, L, k_M)$ 上的求和，且有 $k_1 \leq N - M$ ，而当 $N - M = 1$ 时，即 $k_1 = 1$ ，因此原本需要在划分 $k = (k_1, L, k_M)$ 上的求和简化为对不同的 k 只要在形如 $k = (1, L, 1)$ 的一个划分上求值即可。

取 $M = 2$ ，那么

$$F_{\min}^{M=2, N=M+1}(q^0) = 1 - \left(e^{-2q^0} \sum_{k=0}^2 \sum_{A_k} C_k(q^0 \mathbf{I}) \right)^2 \quad (36)$$

其中，右侧的求和项 A_k 可分别写为

$$k=0, A_0 = \frac{1}{0!} (\text{tr} q^0 \mathbf{I})^0 = 1 \quad (37)$$

$$k=1, A_1 = \frac{1}{1!} (\text{tr} q^0 \mathbf{I})^1 = M q^0 = 2 q^0 \quad (38)$$

$$k=2, A_2 = \frac{1}{2!} (d_{(1,1)} M_{(1,1)}(q^0 \mathbf{I})) \quad (39)$$

其中，对于 $\sum_k C_k(\mathbf{Y}) = (y_1 + \dots + y_M)^k = (\text{tr} \mathbf{Y})^k$ 且

y_1, \dots, y_M 是矩阵 \mathbf{Y} 的特征值，有 $M_{(1,1)} = \sum_{i < j}^M y_i y_j$ 。而

$d_{(1,1)}$ 是 $C_k(\mathbf{Y})$ 中单项式对称函数 $M_{(1,1)}$ 的系数。如在文献[22]中所示，系数 $d_{(1,1)}$ 可以通过查表获得。但是

需要指出，文献[22]中的表 1 给出的系数表仅适用于 \mathbf{Y} 为实矩阵的情况，而并不适用此处为复矩阵的情况。但仍可依据文献[22]中提供的实矩阵情况下求解各项系数的递推方法类似地获得复矩阵情况下的各项系数，如表 2 所示。查表有 $d_{(1,1)} = 1$ ，

$$d_{(1,1,1)} = \frac{8}{3}, d_{(1,1,1,1)} = 1, d_{(1,1,1,1,1)} = 1。$$

表 2 $C_k(\mathbf{Y})$ 中单项式对称函数 $M_k(\mathbf{Y})$ 的系数

系数 k	k 、?	
2	$\begin{array}{c c} & \lambda \\ \hline (2) & (1,1) \\ \hline \lambda & \\ \hline (2) & \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \\ \hline (1,1) & \end{array}$	
	$\begin{array}{c c} & \lambda \\ \hline (3) & (2,1) (1,1,1) \\ \hline \lambda & \\ \hline (3) & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{array} \\ \hline (2,1) & \\ \hline (1,1,1) & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 8/3 \end{array} \end{array}$	
4	$\begin{array}{c c} & \lambda \\ \hline (4) & (3,1) (2,2) (2,1,1) (1,1,1,1) \\ \hline \lambda & \\ \hline (4) & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \\ \hline (3,1) & \\ \hline (2,2) & \\ \hline (2,1,1) & \\ \hline (1,1,1,1) & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$	
	$\begin{array}{c c} & \lambda \\ \hline (5) & (4,1) (3,2) (3,1,1) (2,2,1) (2,1,1,1) (1,1,1,1,1) \\ \hline \lambda & \\ \hline (5) & \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$	
	5	$\begin{array}{c c} & \lambda \\ \hline (5) & (4,1) (3,2) (3,1,1) (2,2,1) (2,1,1,1) (1,1,1,1,1) \\ \hline \lambda & \\ \hline (5) & \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$
		$\begin{array}{c c} & \lambda \\ \hline (6) & (5,1) (4,2) (4,1,1) (3,2,1) (3,1,1,1) (2,2,1,1) (2,1,1,1,1) (1,1,1,1,1,1) \\ \hline \lambda & \\ \hline (6) & \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & 10 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 12 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$
		6
$\begin{array}{c c} & \lambda \\ \hline (7) & (6,1) (5,2) (5,1,1) (4,2,1) (4,1,1,1) (3,2,1,1) (3,1,1,1,1) (2,2,1,1,1) (2,1,1,1,1,1) (1,1,1,1,1,1,1) \\ \hline \lambda & \\ \hline (7) & \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 12 & 12 & 15 & 20 & 25 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 14 & 14 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 16 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$		

由此

$$A_2 = \frac{1}{2!} (q^0)^2 = \frac{q^0^2}{2} \quad (40)$$

把式(37)、式(38)、式(40)代入式(36)，有

$$F_{\min}^{M=2, N=M+1}(q^0) = 1 - \left(e^{-2q^0} \left(1 + 2q^0 + \frac{1}{2} q^0^2 \right) \right)^2 \quad (41)$$

类似地，当 M 等于 3, 4, 5，分别有

$$F_{\min}^{M=3, N=M+1}(q^0) = 1 - \left(e^{-3q^0} \left(1 + 3q^0 + \frac{3}{2} q^0^2 + \frac{4}{9} q^0^3 \right) \right)^2 \quad (42)$$

$$F_{\min}^{M=4, N=M+1}(q^0) = 1 - \left(e^{-4q^0} \left(1 + 4q^0 + 3q^0^2 + \frac{16}{9} q^0^3 + \frac{1}{24} q^0^4 \right) \right)^2 \quad (43)$$

$$F_{\min}^{M=5, N=M+1}(q^0) = 1 - \left(e^{-5q^0} \left(1 + 5q^0 + 5q^0^2 + \frac{40}{9} q^0^3 + \frac{5}{24} q^0^4 + \frac{1}{120} q^0^5 \right) \right)^2 \quad (44)$$

综合上述结果，当 $M = N - 1$ 时，式(35)简化为

$$F_{\min}^{M=N-1}(q^0) = 1 - \left(e^{-Mq^0} \sum_{k=0}^M \frac{1}{k!} \binom{M}{k} d_{(1,\dots,k)} q^{0k} \right)^2 \quad (45)$$

其中， $d_{(1,\dots,k)}$ 是上述 $C_k(\mathbf{Y})$ 单项式对称函数 $M_{(1,\dots,k)}(\mathbf{Y})$ 的特定系数， k 表示括号中 1 的个数。特别地，当 $k=0,1$ 时， $d_{()_0} = 1$ ， $d_{()_1} = 1$ ， k 其余取值下的 $d_{(1,\dots,k)}$ 值可查表 2 获得或者利用前面所提的递推算法计算。

5 仿真结果

在本节中，将用数值仿真来评估前一节所提的 ZF 协作发射策略的和速率估计和中断概率性能。考虑如下的参数设定 $M + N = L$ 和 $b = \frac{M}{N} - 1$ 。纵贯

整个仿真，归一化的信道矩阵 \mathbf{H}_{mn} 都是由每个元素均满足独立同分布 $CN(0,1)$ 的随机矩阵生成。参数 b 被设定为 1, 1/2, 1/5, 1/10。

5.1 和速率的估计

图 2~图 5 描述在不同空间数据流配置 $M = \{2, 5, 10, 20\}$ 和不同 b 值情况下，解析和速率估计与和速率的数值仿真结果间的比较。2 个估计方法，即式(18)和式(20)，分别表示为 C_{asympt} 和 C_{asympt}^* 都被仿真了。结果显示所提估计与数值结果间的差距随着

M 的增长和 b 的减小而不断减小。由于所提的估计是基于大维的假设所推导出来的, 所以当 M 较大时, 比如 $M = 10$, 且 $b = \frac{1}{2}$ 时, 所提的式(20)的和速率估计非常接近数值结果。仿真结果还表明, 所提和速率估计的精度还取决于因子 b 。当 b 较小时, 即使 M 不大, 例如 $M = 2$, 所提的和速率估计依然能展示很好的性能。

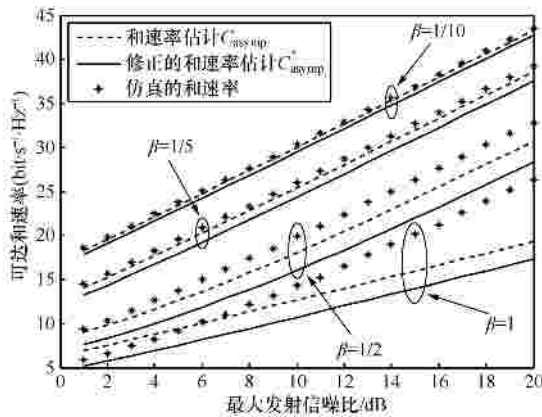


图 2 不同 b 下的和速率估计 ($M=2$)

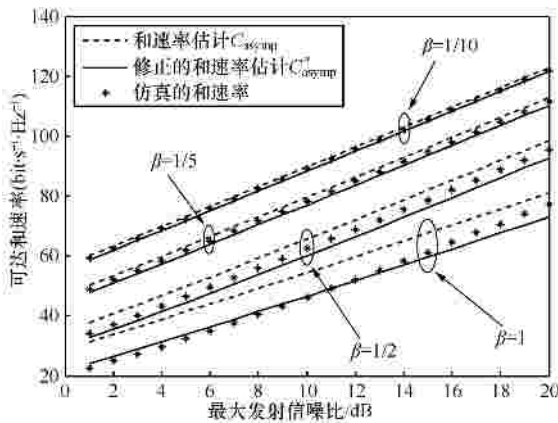


图 3 不同 b 下的和速率估计 ($M=5$)

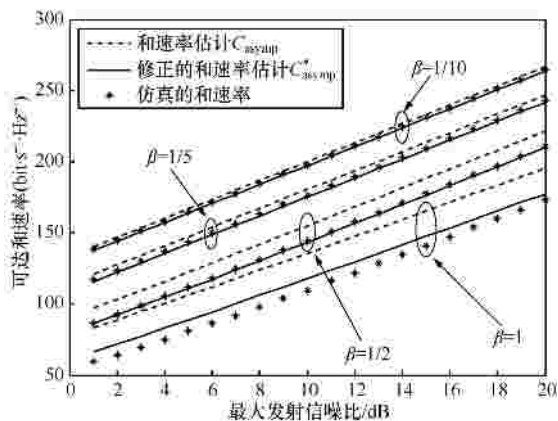


图 4 不同 b 下的和速率估计 ($M=10$)

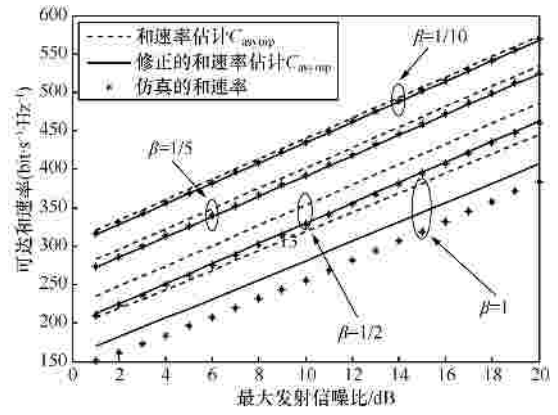


图 5 不同 b 下的和速率估计 ($M=20$)

比较所提的 2 个估计, 可以看到修正的估计式(20)比估计式(18)在大多数情况下都显示出更好的性能。唯一例外的是极限情况, 即 $M = 2$ 或者 $b = 1$ 。为了进一步探究随着 M 趋向无穷时 2 个估计的收敛性, 首先对每个估计定义一个百分误差指标 $|C_{\text{estimate}} - C_{\text{simulation}}| / C_{\text{simulation}}$, 其中 C_{estimate} 和 $C_{\text{simulation}}$ 分别表示估计结果和数值结果。那么, 所提两个估计随着不同 M 而变化的百分误差指标就如图 6 所示。

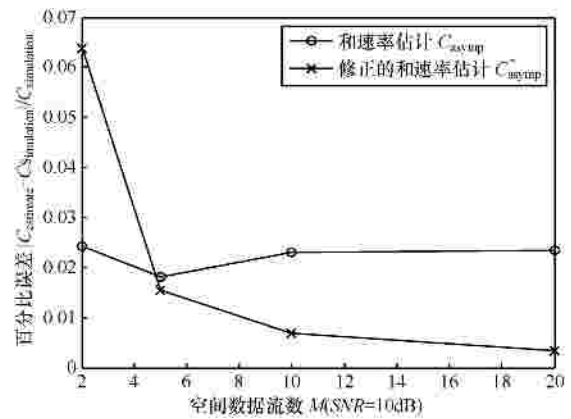


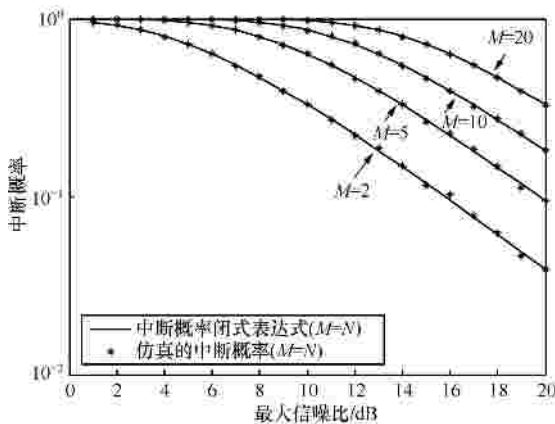
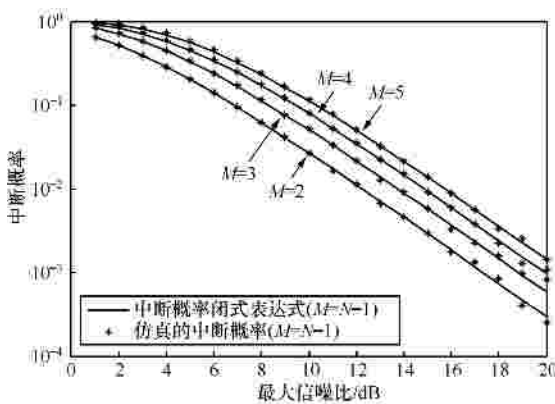
图 6 随着 M 增加的百分误差性能 $|C_{\text{estimate}} - C_{\text{simulation}}| / C_{\text{simulation}}$ ($b = 1/5$)

可以看到, 当 b 较小时, 例如, $b = 1/5$, 修正的估计随着 M 趋向无穷收敛到数值结果, 而估计式(18)却展示出随着 M 的增大存在着一个误差平台。

5.2 中断概率

图 7、图 8 分别描述了当 $M = N$ 和 $M = N - 1$ 时, ZF 协作发射策略中断概率闭式表达式与蒙特卡洛仿真结果比较。为了便于比较, 参数 q 取为 1。由两图中可以看到, 所提的 2 个中断概率式(33)和式(45)在各种场景下都与数值结果相当吻合。这验证了本文的中断概率闭式表达式推导的正确性。特别地, 如图 7 所示, 当 $M = N$, 即 $b = 1$ 时, ZF 协

作发射策略的中断概率性能是随着 M 的增加不断恶化的。这是基于这样的事实：随着 M 的增加，当最小特征值几乎确定收敛到 $N(1-\sqrt{b})^2=0$ 时，导致式(13)中的中断事件的发生概率增加。如图 8 所示，当 $M=N-1$ 时，可以观察到类似的结果。比较图 7 与图 8，可以发现对于相同的 M ， $b = \frac{M}{M+1}$ ，即 $M=N-1$ 的 ZF 协作系统的中断性能要远好于 $b=1$ ，即 $M=N$ 的。它们间的性能差距随着 M 的增加而减小。

图 7 $M=N$ 时的中断概率图 8 $M=N-1$ 时的中断概率

6 结束语

本文分析了干扰信道中基于 ZF 协作 MIMO 发射策略的性能。利用 Wishart 矩阵的渐近特性，推导了 2 个在大维极限情况下的和速率闭式表达式。并且对于 $M=N$ 和 $M=N-1$ 2 个特殊情况，推导了中断概率的闭式表达式。这些和速率估计以及中断概率推导的精确性都通过数值仿真结果验证了。数值结果还表明所提的估计不仅在大维极限的情

况下展示了很好的性能，而且即使对于较小维数更通常的情况下也有着不错的性能。

参考文献：

- [1] YE S, BLUM R S. Optimized signaling for MIMO interference systems with feedback[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(11): 2839-2848.
- [2] CADAMBE V R, JAFAR S A. Interference alignment and the degrees of freedom for the K user interference channel[J]. IEEE Trans on Inform. Theory, 2008, 54:3425-3441.
- [3] SUH C, HO M, TSE D. Downlink interference alignment[EB/OL]. <http://www.eecs.berkeley.edu/chsuh/DownlinkIA.pdf>, 2010.
- [4] PETERS S W, HEATH R W Jr. Interference alignment via a ternating minimization[A]. Proc of the IEEE Int Conf on Acoustic Signal Proc[C]. Taipei, Taiwan, China, 2009. 2445 - 2448.
- [5] NOSRAT-MAKOU EI B, ANDREWS J G, HEATH R W Jr. MIMO interference alignment over correlated channels with i rfect CSI[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59:2783-2794.
- [6] THUKRAL J, BOELCSKEI H. Interference alignment with limited feedback[A]. IEEE Trans on Information Theory, 2009[C]. Seoul, Korea, 2009. 1759-1763.
- [7] CHAE C B, HWANG I S, HEATH R W, et al. Interference aware-coordinated beamforming system in a two-cell environment[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2009.
- [8] DAHROUJ H, YU W. Coordinated beamforming for the multicell multi-antenna wireless system[J]. IEEE Trans On Wireless Communications, 2010, 9(5):1748-1759.
- [9] HUANG Y, ZHENG G, BENGTTSSON M, et al. Ottersten "distributed multicell beamforming design with limited intercell coordination[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2):728-738.
- [10] HUANG K, ZHANG R. Cooperative precoding with limited feedback for MIMO interference channels[EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/1009.3345>.
- [11] SILVERSTEIN J W. The smallest eigenvalue of a large-dimensional Wishart matrix[J]. Ann Prob, 1984, 13(4):1364-1368.
- [12] EDELMAN A. Eigenvalues and Condition Number of Random Matrices[D]. Cambridge, MA: MIT, 1989.
- [13] RATNARAJAH T, VAILLANCOURT R, ALVO M. Eigenvalues and condition numbers of complex random matrices[J]. SIAM 2005, 26(2): 441-456.
- [14] TULINO A M, VERDU S. Random matrix theory and wireless communications[J]. Foundations and Trends in Communicatio and Information Theory, 2004.
- [15] BAI Z, SILVERSTEIN J W. Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices[M]. Berlin: Spinger, 2009.
- [16] BAI Z, CHEN Y, LIANG Y C. Random matrix theory and its applications[J]. World Scientific, 2009.

[17] MULLER R R. Random matrix theory for wireless communications[EB/OL]. <http://www.iet.ntnu.no/~ralf/rmt.pdf>, 2010.

[18] WIGNER E. Results and theory of resonance absorption[A]. Conference on Neutron Physics by Time-of-Flight[C]. USA, 1956.

[19] DYSON F. Statistical theory of the energy levels of complex systems[J]. J of Math Physics, 1962, 3(1):140-175.

[20] DYSON F. A class of matrix ensembles[J]. J of Math Physics, 1972, 13(1):90-98.

[21] LOZANO A, TULINO A M, VERDU S. Multiple-antenna capacity in the lowpower regime[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2003, 49: 2527-2544.

[22] MUIRHEAD R J. Aspects of Multivariate Statistical Theory[M]. New York: Wiley, 1982.



董健 (1978-), 男, 江苏南京人, 硕士, 江苏省邮电规划设计院有限责任公司工程师, 主要研究方向为多用户 MIMO 通信信号处理。



黄永明 (1977-), 男, 江苏吴江人, 博士, 东南大学副教授, 主要研究方向为 MIMO 通信信号处理、多用户通信信号处理和协作通信。

作者简介:



王海荣 (1977-), 男, 江苏无锡人, 东南大学博士生, 主要研究方向为多用户 MIMO 通信信号处理、协作通信和网络编码。



杨绿溪 (1964-), 男, 安徽桐城人, 东南大学教授、博士生导师, 主要研究方向为移动通信空时信号处理、协作通信和网络编码。